

# Das asymmetrische Trennrohr

Von G. DICKEL

Aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität München  
(Z. Naturforsch. 16 a, 755—759 [1961]; eingegangen am 25. Mai 1961)

Es wird die Theorie eines asymmetrischen Trennrohres behandelt und gezeigt, daß örtliche Schwankungen der Spaltbreite eine erhebliche Verminderung der Trennschärfe herbeiführen, den Anfangstransport aber praktisch unbeeinflußt lassen.

Seit einer Reihe von Jahren beschäftigen wir uns mit dem Problem, das Trennrohr zur quantitativen Anreicherung heranzuziehen. Dabei konzentrierte sich unser Augenmerk vorzüglich auf die Anreicherung des  $C^{14}$  in Proben, die zur Altersbestimmung dienen sollten. Geht man dabei so vor, daß man das  $C^{14}$  im Trennrohr anreichert, bis das Endgleichgewicht erreicht ist, so muß man, um die gesuchte Ausgangskonzentration zu ermitteln, den Anreicherungsfaktor mit Hilfe der Theorie errechnen. Auf Grund einer langjährigen Erfahrung wissen wir aber, daß der tatsächliche erreichbare Trennfaktor häufig nur etwa die Hälfte des theoretisch geforderten Wertes beträgt. Wir haben uns daran gewöhnt, hier einen entsprechenden Reduktionsfaktor hinzuzufügen. Für quantitative Messungen können wir nun diesen Faktor durch eine Vergleichsmessung empirisch bestimmen. Wegen der schlechten Reproduzierbarkeit dieser Verfahren, die zu einem Teil darauf zurückzuführen ist, daß sich das Endgleichgewicht nur asymptotisch einstellt, zum anderen auf die Störungsanfälligkeit dieses Gleichgewichts gegen Erschütterungen, Temperaturschwankungen u. dgl., sind wir von dieser Methode wieder abgekommen.

Auf der Suche nach einem geeigneten quantitativen Trennverfahren sind wir auf die schon früher von uns beschriebene Transportmethode<sup>1, 2</sup> gestoßen, die wir mit Erfolg auf das obige Problem angewandt haben. Genaue Untersuchungen dieser Methode haben nun zu unserer Überraschung gezeigt, daß hier die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie fast quantitativ ist. Wie läßt es sich aber erklären, daß in ein und demselben Trennrohr beim Endgleichgewicht Abweichungen bis zu 100% von der Theorie auftreten, während der Anfangstransport praktisch quantitativ ist? Ist dies auf irgendwelche Wirbelbildung zurückzuführen? Genaue

Experimente, die wir zur Klärung dieses Sachverhalts angestellt haben, und über die wir im Nachfolgenden berichten werden, haben uns gezeigt, daß eine solche Annahme ungerechtfertigt ist. Sie haben uns aber auch den Hinweis gegeben, daß die Ursache dieses Verhaltens in der unvermeidlichen Asymmetrie einer Trennrohranordnung bezüglich des Wandabstandes und der Temperaturdifferenz zu suchen ist. Für die auf solche Weise zustande kommenden Änderungen der Strömungsverhältnisse hat sich die Bezeichnung „parasitäre Strömung“<sup>3</sup> eingebürgert. Die im folgenden aufgestellte Theorie des asymmetrischen oder parasitären Trennrohres wird darüber genauere Aufklärung geben.

## Die Theorie des asymmetrischen Trennrohrs

Wir gehen von der Vorstellung aus, daß die parasitären Strömungen durch einen ungleichmäßigen Abstand sowie durch örtliche Temperaturdifferenzen von heißer und kalter Wand bedingt sind. Solche Fehler sind konstruktionsbedingt und lassen sich bei größeren Rohrlängen kaum vermeiden. Wir wollen uns bei der folgenden Theorie auf die ebene Anordnung beschränken und nachträglich die üblichen Korrekturen<sup>3, 4</sup> zur Umrechnung auf den radialen Fall hinzufügen. Die Abb. 1 zeigt den von uns zugrunde gelegten Trennrohrquerschnitt, wobei die  $z$ -Achse in Richtung der Trennrohrlänge gelegt ist. Im Falle einer konzentrischen Trennrohranordnung denken wir uns den Grundriß halbkreisförmig aufgerollt und durch sein Spiegelbild ergänzt. Mit  $\Delta x_0$  haben wir dabei den Sollabstand von heißer zur kalten Wand bezeichnet, mit  $\delta x$  die Abweichungen davon, die noch irgendeine Funktion von  $y$  sein können. Wir beschränken uns im folgenden auf

<sup>1</sup> G. DICKEL, Proc. Int. Symp. on Isotope Separation, Amsterdam 1957, North Holland Publ. Co., S. 433.

<sup>2</sup> G. DICKEL, K. H. BUSEN u. W. STEINER, Z. phys. Chem. 17, 1 [1958].

<sup>3</sup> R. C. JONES u. W. H. FURRY, Rev. Mod. Phys. 18, 151 [1946].

<sup>4</sup> H. JENSEN u. L. WALDMANN, Naturwiss. 29, 467 [1941].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

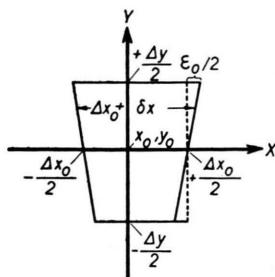


Abb. 1. Trennrohrquerschnitt.

lineare Abweichungen und schreiben

$$\Delta x = \Delta x_0 + \delta x = \Delta x_0 + 2 \varepsilon_0 \frac{y}{\Delta y} . \quad (1)$$

Analoge Abweichungen nehmen wir auch für die Temperaturen von heißer und kalter Wand an und schreiben dafür

$$T_h = T \left( \frac{\Delta x_0}{2}, y_0 \right) + \vartheta_h \frac{y}{\Delta y} , \quad (2a)$$

$$T_k = T \left( -\frac{\Delta x_0}{2}, y_0 \right) + \vartheta_k \frac{y}{\Delta y} . \quad (2b)$$

Im Gegensatz zu den bisherigen Trennrohrtheorien<sup>5, 6</sup> nehmen wir im folgenden ein dreidimensionales Problem an und berücksichtigen die Variation der Umlaufströmung in der  $y$ -Richtung, ebenso auch die Diffusion in dieser Richtung. Wir wollen dabei das in Abb. 2 skizzierte Trennrohr zugrunde legen, bei dem mit konstantem Durchfluß bzw. Entnahme  $\sigma$

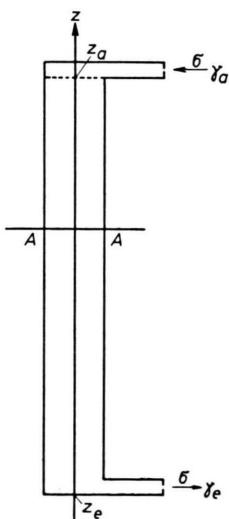


Abb. 2. Trennrohrlängsschnitt.

gearbeitet wird. Am unteren Ende soll dabei die schwere Komponente mit einer Konzentration von  $\gamma_e$  abgezogen werden, während beim oben nachströmenden Gas die Konzentration nur  $\gamma_a$  betragen soll. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn unsere Anordnung eine endliche Divergenz bzw. eine Quelle besitzt. In der Praxis erreicht man dies dadurch, daß man am oberen Ende einen großen Vorratsbehälter anbringt, oder besser, indem man dort dauernd das Ausgangsgemisch vorbeispülen läßt. Bei der mathematischen Beschreibung denken wir uns diese Spülung durch eine flächenhafte, am oberen Ende befindliche Quellen-Senken-Kombination ersetzt, die den erforderlichen Strom an schweren Molekülen emittiert, und einen ebenso großen an leichten Molekülen absorbiert. Wir setzen hierfür

$$q \cdot \operatorname{Div} \mathfrak{M}(x, y, z_a) = \tau , \quad (3)$$

wobei  $\mathfrak{M}(x, y, z)$  den Strömungsvektor der von uns ins Auge gefaßten schweren Komponente und  $q$  den Querschnitt bedeutet. An allen anderen Stellen innerhalb unseres Trennrohres mit Ausnahme der Stelle  $z_a$  gilt aber

$$\operatorname{div} \mathfrak{M}(x, y, z) = 0 . \quad (4)$$

Beachten wir bei der Bildung des Strömungsvektors  $\mathfrak{M}$ , daß in der  $x$ - und  $y$ -Richtung die thermische Diffusion, in der  $z$ -Richtung die Konvektionsströmung  $w(x, y)$  und die Entnahmestromung  $v$  liegt, und nehmen wir ferner an, daß in den drei Raumrichtungen sich Konzentrationsgradienten einstellen, so erhalten wir an Stelle von (4)

$$\begin{aligned} \varrho D \left[ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + k_T \frac{\partial^2 \ln T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + k_T \frac{\partial^2 \ln T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right] \\ - \varrho \frac{\partial \gamma}{\partial z} (w + v) = 0 , \end{aligned} \quad (5)$$

worin  $\varrho$  die Dichte und  $D$  den Diffusionskoeffizienten des Gases bezeichnet, für die wir konstante Mittelwerte nehmen wollen.

Die Randbedingungen für unser Problem ergeben sich aus der Tatsache, daß der Diffusionsstrom an allen Stellen der Trennrohrumrandung verschwindet, ebenso der Konvektionsstrom  $w$ . Sie lauten

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = \pm \frac{\Delta x}{2} , \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = \pm \frac{\Delta y}{2} , \quad (6b)$$

<sup>5</sup> W. H. FURRY, R. C. JONES u. W. ONSAGER, Phys. Rev. (2) 55, 1085 [1939].

<sup>6</sup> L. WALDMANN, Z. Phys. 114, 53 [1939].

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} \equiv \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z = z_a = z_e, \quad (6 \text{ c})$$

$$w(x, y) = 0 \quad \text{für } x = \pm \frac{1}{2} \Delta x, z_a, z_e. \quad (6 \text{ d})$$

Die Bedeutung der hier eingeführten Funktion  $u$  wird später noch geläufig werden. Da die beiden zur  $x$ -Achse parallelen Begrenzungswände nur gedacht sind – man verwendet in der Praxis immer ringförmige Trennspalte –, haben wir dort die Umlaufströmung nicht Null werden lassen. Daß aber auch beim Fehlen der Wände dort die Bedingungen (6 b) erfüllt sind, erkennt man, wenn man bedenkt, daß beim Aufrollen unserer Anordnung dort ein Maximum bzw. ein Minimum entsteht.

Nunmehr integrieren wir Gl. (4) über den gesamten Raum des Trennrohres und verwandeln mittels des GAUSSSchen Satzes in ein Oberflächenintegral

$$\tau = -\varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} D \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy + \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \gamma w dx dy + \varrho v \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} (\gamma - \gamma_a) dx dy. \quad (8)$$

Den zweiten Integralausdruck formen wir durch 2-malige partielle Integration um, wobei wir bei dieser Operation das bestimmte Integral

$$G(x, y) = \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^x w dx \quad (9)$$

verwenden, das wegen (15) bei  $\pm \frac{1}{2} \Delta x$  verschwindet. Wir erhalten zunächst an Stelle von (8) unter Beachtung von (6 a)

$$\begin{aligned} \tau = & -\varrho D \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy - \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} k_T \frac{\partial \ln T}{\partial x} \left| \int G(x, y) dx dy \right|_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} dy \\ & + \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \int G(x, y) dx dy + \varrho v \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} (\gamma - \gamma_a) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

In den dritten Integralausdruck setzen wir für  $\partial^2 \gamma / \partial x^2$  den durch Auflösung der Gl. (5) nach dieser Größe erhaltenen Ausdruck ein und wenden auf den dabei erhaltenen Integranden  $\partial^2 \ln T / \partial x^2$  unter Beachtung von Gl. (6 a) nochmals die partielle Integration an. Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \tau = & -\varrho D \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy - \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} k_T \frac{\partial \ln T}{\partial x} G(x, y) dx dy + \frac{\varrho}{D} \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} w \int G(x, y) dx dy \\ & - \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - k_T \frac{\partial^2 \ln T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \int G(x, y) dx dy + \sigma(\gamma - \gamma_e). \end{aligned} \quad (11)$$

Um die Integration dieser Gleichung durchführen zu können, ist noch die Kenntnis von  $w$  als Funktion von  $x$  und  $y$  erforderlich, ferner ein Lösungsansatz für  $\gamma$ . Was die Umlaufgeschwindigkeit anbelangt, so muß diese der STOKES-NAVIERschen Dgl.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{g}{\eta} [\varrho(x, y) - \varrho_0] \quad (12)$$

über die gesamte Umhüllung, wobei wir die Flächendivergenz am oberen Ende durch einen Schlitzbereich herausschneiden. Unter Beachtung von (3) und der Randbedingungen (6) erhalten wir

$$\tau = \varrho(\gamma_e - \gamma_a) v \int_{\tilde{F}} dx dy \equiv (\gamma_e - \gamma_a) \sigma. \quad (7)$$

Durch den rechtsstehenden Ausdruck ist zugleich die Entnahme  $\sigma$  definiert. Diese Gleichung besagt einfach, daß der Transport gleich der Differenz der Konzentrationen zwischen ein- und austretendem Gas ist, wie wir es eingangs gefordert haben.

Um die Ausgangsgleichung für unsere weiteren Betrachtungen zu gewinnen, führen wir die Integration von Gl. (4) über den oberen Teil der in Abb. 2 dargestellten Anordnung durch, der nach unten von einer in willkürlicher Höhe  $z$  verlaufenden Schnittfläche A – A begrenzt ist. Für die letztere hat natürlich  $\partial \gamma / \partial z$  einen endlichen Wert und wir erhalten

$$\tau = -\varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} D \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy + \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \gamma w dx dy + \varrho v \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} (\gamma - \gamma_a) dx dy. \quad (8)$$

Den zweiten Integralausdruck formen wir durch 2-malige partielle Integration um, wobei wir bei dieser Operation das bestimmte Integral

$$G(x, y) = \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^x w dx \quad (9)$$

verwenden, das wegen (15) bei  $\pm \frac{1}{2} \Delta x$  verschwindet. Wir erhalten zunächst an Stelle von (8) unter Beachtung von (6 a)

$$\begin{aligned} \tau = & -\varrho D \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy - \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} k_T \frac{\partial \ln T}{\partial x} \left| \int G(x, y) dx dy \right|_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} dy \\ & + \varrho \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \int G(x, y) dx dy + \varrho v \int_{-\frac{1}{2} \Delta y}^{+\frac{1}{2} \Delta y} \int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{+\frac{1}{2} \Delta x} (\gamma - \gamma_a) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

gehören, wobei mit  $\varrho_0$  die Dichte des Gases am Koordinatenursprung bezeichnet werden soll, an welchem  $w = 0$  ist. Die Variation der Dichte  $\varrho(x, y)$  wird im vorliegenden Falle praktisch nur durch die Temperaturverteilung bedingt. Nach dem idealen Gasgesetz gilt

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\varrho_0}{T_0} [T(x, y) - T_0], \quad (13)$$

wobei mit  $T_0$  wiederum die Temperatur in unserem Koordinatenursprungspunkt bezeichnet wird.

Die Temperaturverteilungsfunktion  $T(x, y)$  gewinnen wir aus dem vorgegebenen Temperaturverlauf an der heißen und kalten Wand (2 a) und (2 b). Schreiben wir für die Solltemperaturdifferenz  $\Delta T_0 = T(\frac{1}{2} \Delta x_0, y_0) - T(-\frac{1}{2} \Delta x_0, y_0)$  und für die Temperatur im Koordinatenursprung

$$T_0 = \frac{1}{2} [T(\frac{1}{2} \Delta x_0, y_0) + T(-\frac{1}{2} \Delta x_0, y_0)],$$

so erhalten wir bei Annahme eines linearen Temperaturgefälles

$$T(x, y) = T_0 + \frac{1}{2} (\vartheta_h + \vartheta_k) \frac{y}{\Delta y} + [\Delta T_0 + (\vartheta_h - \vartheta_k) \frac{y}{\Delta y}] \frac{x}{\Delta x} \quad (14)$$

$$w = \bar{w}_0 \left\{ 8 \frac{x}{\Delta x_0} - 32 \left( \frac{x}{\Delta x_0} \right)^3 + \left[ 8 \frac{x}{\Delta x_0} + 32 \left( \frac{x}{\Delta x_0} \right)^3 \right] \frac{2 \varepsilon}{\Delta x} \cdot \frac{y}{\Delta y} + \frac{\vartheta_h - \vartheta_k}{\Delta T_0} \left[ 8 \frac{x}{\Delta x_0} - 32 \left( \frac{x}{\Delta x_0} \right)^3 \right] \frac{y}{\Delta y} + \frac{\vartheta_h + \vartheta_k}{2 \Delta T_0} \left[ 24 - 96 \left( \frac{x}{\Delta x_0} \right)^2 \frac{y}{\Delta y} \right] \right\}, \quad (15)$$

wobei für den Mittelwert der ungestörten Umlaufgeschwindigkeit  $w_0$  die Beziehung

$$\bar{w}_0 = -\frac{\varrho_0 g}{192 \eta} \frac{\Delta T_0}{T_0} \Delta x_0^2 \quad (16)$$

gilt.

Da  $\gamma$  bzw.  $u$  eine Funktion von  $x$ ,  $y$  und  $z$  ist, machen wir den Ansatz

$$u = u(x) \cdot u(y) \cdot u(z) \quad (17 \text{ a})$$

$$\text{mit } u(\alpha) = \gamma(\alpha) + k_T \ln \frac{T(\alpha)}{T_0}; \quad (\alpha = x, y, z). \quad (17 \text{ b})$$

Die Funktionen  $u(x)$  und  $u(y)$  entwickeln wir in der Umgebung des Koordinatenursprungs in eine TAYLOR-Reihe und brechen nach dem 4. Glied ab. Das ist sicher wegen der Kleinheit der Thermodiffusion und der dadurch bedingten Konzentrationsvariation in der  $x$ - und  $y$ -Richtung eine sehr gute Näherung. Mittels der Randbedingungen (6 a), (6 b) und (6 c) bestimmen wir die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  der Entwicklung und erhalten mit  $a \equiv a_1$ ,  $b \equiv b_1$

$$u = u(z) \cdot \left\{ 1 + a \Delta x \left[ \frac{x}{\Delta x} - \frac{4}{3} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)^3 \right] \right\} \cdot \left\{ 1 + b y \left[ \frac{y}{\Delta y} - \frac{4}{3} \left( \frac{y}{\Delta y} \right)^3 \right] \right\} \quad (18)$$

$$\simeq u(z) \left\{ 1 + a \Delta x \left[ \frac{x}{\Delta x} - \frac{4}{3} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)^3 \right] + b \Delta y \left[ \frac{y}{\Delta y} - \frac{4}{3} \left( \frac{y}{\Delta y} \right)^3 \right] \right\}.$$

Aus (14) können wir den in (12) bzw. (13) benötigten Ausdruck für die Dichtevariation herleiten.

Die Lösung von (12) selbst gewinnen wir am einfachsten auf Grund der folgenden Überlegung: Da die Schwankung von  $w$  in der  $y$ -Richtung als eine Störung betrachtet werden kann, so suchen wir zunächst die Lösung für den Fall, bei welchem  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$  ist. Letztere können wir unter Beachtung von (6 d) unmittelbar durch Integrationen von (12)<sup>5-7</sup> gewinnen. Diese Lösung entwickeln wir nach  $y$  in Reihe, indem wir darin für  $\Delta x$  den Ausdruck (1) verwenden, und brechen nach dem ersten Glied ab. Da diese Gleichung linear in  $y$  ist, verschwindet sicher ihre zweite Ableitung nach dieser Größe und sie stellt somit eine Lösung von (12) dar. Im einzelnen lautet diese, wenn wir auch noch die Variation von  $\Delta T$  und  $T$  mit  $y$  berücksichtigen:

Die in (11) benötigten Ausdrücke  $\partial \gamma / \partial z$  und  $\partial^2 \gamma / \partial z^2$  erhalten wir aus (18), wenn wir wegen der Temperaturabhängigkeit von  $u(z)$  beachten, daß  $u(z) = \gamma(z)$  ist.

Jetzt können wir nach Gebrauch von (15) und (18) die in Gl. (11) vorkommenden Integrale auswerten. Die Durchführung der Integration wird durch den Umstand erleichtert, daß bei der Integration ungerader Integranden gerade Funktionen entstehen, deren Werte wegen der Symmetrie der Grenzen aber Null werden. Auf diese Weise entfallen die meisten Glieder, welche die Koeffizienten  $a$  und  $b$  enthalten, die übrigbleibenden sind von höherer Ordnung und können vernachlässigt werden<sup>8</sup>. Bei der Integration über  $y$  müssen wir beachten, daß die Grenzen  $\Delta x$  noch Funktionen von  $y$  sind. Wir entwickeln daher die auftretenden Potenzen von  $(\Delta x / \Delta x_0)$  unter Beachtung von (1) in die Reihe  $\left( \frac{\Delta x}{\Delta x_0} \right)^n = 1 + n \frac{2 \varepsilon}{\Delta x_0} \frac{y}{\Delta y} + \frac{n(n-1)}{2} \left( \frac{2 \varepsilon y}{\Delta x_0 \Delta y_0} \right)^2$ . (19)

Wir erhalten schließlich für Gl. (11) den Ausdruck

$$\tau = \tau_A - K \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \sigma(\gamma - \gamma_a) \quad (20)$$

$$\text{mit } \tau_A = \frac{4}{15} k_T \varrho q \bar{w}_0 \frac{\Delta T_0}{T_0} \varphi P_\tau \quad (21)$$

<sup>7</sup> H. JENSEN, Angew. Chem. 54, 405 [1941].

<sup>8</sup> Daß dies für die  $a$  enthaltenden Glieder der Fall ist, hat die bisherige Trennröhrtheorie schon ergeben.

$$\text{und } K = \varrho q \left( 0,1 \frac{w_0^2 \Delta x_0^2}{D} \psi P_K + D \chi \right), \quad (22)$$

wobei wir bis auf Glieder höherer Ordnung für

$$P_r = 1 + \frac{7}{6} \left( \frac{\varepsilon}{\Delta x_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\vartheta_h - \vartheta_k}{\Delta T_0} \cdot \frac{\varepsilon}{\Delta x_0} \quad (23)$$

$$+ \frac{1}{12} \left( \frac{\vartheta_h - \vartheta_k}{\Delta T_0} \right)^2 - \frac{5}{2} \frac{(\vartheta_h - \vartheta_k)}{\Delta T_0} \frac{(\vartheta_h - \vartheta_k)}{2 \Delta T_0}$$

und

$$P_K = 1 + \frac{47}{6} \left( \frac{\varepsilon}{\Delta x_0} \right)^2 + 78 \left( \frac{\vartheta_h + \vartheta_k}{2 \Delta T_0} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{\vartheta_h - \vartheta_k}{\Delta T_0} \right)^2 \quad (24)$$

$$+ \frac{7}{6} \frac{\vartheta_h - \vartheta_k}{\Delta T_0} \frac{\varepsilon}{\Delta x_0} - 28 \left( \frac{\vartheta_h + \vartheta_k}{2 \Delta T_0} \right) \frac{\varepsilon}{\Delta x_0}$$

gesetzt haben. Ferner haben wir für  $\Delta x_0 \cdot \Delta y = q$  geschrieben und gleichzeitig die eingangs erwähnten Umrechnungsfaktoren  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\chi$  auf das radiale Problem eingeführt. Setzen wir in (23) und (24) die Abweichungsgrößen  $\varepsilon = \vartheta_h = \vartheta_k = 0$ , so wird  $P_r = P_K = 1$  und wir kommen wieder zu der geläufigen Transportgleichung zurück<sup>3, 5-7</sup>.

Wir wenden uns zunächst einer Betrachtung der Formel (24) zu. Das zweite, dritte und vierte Glied ist der Reihenfolge nach durch die Abweichung von der Spaltbreite, der mittleren Temperatur und der Temperaturdifferenz bedingt. Das zweite Glied ist am besten erfassbar. Bei einer Spaltbreite von 5 mm betragen die maximalen Abweichungen etwa 1 mm, so daß dieses Glied hierbei einen Wert von etwa 0,3 annimmt. Die beiden nächsten Glieder röhren von Inhomogenitäten der Wandtemperaturen her. Derartige Störungen treten wegen der hohen Wärmeleitfähigkeit bei Metallrohren nur in geringem Maße auf, doch fallen wegen des großen Koeffizienten beim dritten Glied bereits Abweichungen von einigen Prozenten der Temperatur ins Gewicht, während diese beim vierten Glied wegen des Faktors 1/12 praktisch nicht zur Geltung kommen können. Solche Störungen dürften im allgemeinen dadurch verursacht werden, daß die Heizwendel im Innenrohr asymmetrisch verläuft. Daher braucht man in solchen Fällen nur die Störungsgröße  $\vartheta_h$  ins Auge zu fassen, während  $\vartheta_k = 0$  gesetzt werden kann. Des weiteren können Schwankungen der mittleren Tem-

peratur theoretisch auch durch eine Dezentrierung des Heizrohres gegenüber dem Kühlrohr verursacht werden, praktisch können diese aber vernachlässigt werden, da in solchen Fällen an den gegenüberliegenden Wänden die Werte von  $\vartheta_h$  und  $\vartheta_k$  das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen und das dritte Glied<sup>9</sup> dadurch bis auf höhere Ordnung verschwindet.

Außer diesen drei Korrekturgliedern, die immer positive Vorzeichen haben, treten noch zwei weitere Glieder hinzu, die von der Wechselwirkung zwischen der Abweichung des Wandabstandes und der mittleren Temperatur bzw. der Temperaturdifferenz herühren. Da aber bei einer lokalen Erhöhung der Temperatur der heißen Wand sowohl die Temperaturdifferenz als auch die mittlere Temperatur erhöht wird, kompensiert sich ihr Einfluß wegen des entgegengesetzten Vorzeichens in Gl. (24).

Was nun die Beeinflussung der parasitären Glieder auf den Transport bzw. die Größe  $P_r$  anbelangt, so entnehmen wir der Gl. (23), daß wegen der Kleinheit der Koeffizienten gegenüber (24) hier die Korrektur praktisch kaum ins Gewicht fällt. Im übrigen muß man bedenken, daß für den Transport  $\tau_A$  die Abweichung von  $\varepsilon/\Delta x_0$  am oberen Ende des Trennrohres maßgebend ist, hingegen in (24) für  $\varepsilon/\Delta x_0$  der Mittelwert über das ganze Trennrohr. Am oberen und unteren Ende ist nun bei den meisten Trennrohr-Konstruktionen die Zentrierung am besten, während Abweichungen auf die Länge des Trennrohres praktisch unvermeidlich sind. In allen Fällen ist aber noch hervorzuheben, daß bei Formel (23) und (24) die Störanfälligkeit mit dem Quadrat der Abweichungen zunimmt.

Gl. (20) ist grundlegend für alle Vorgänge in Trennrohren. Aus ihr entspringen eine Reihe von spezielleren Formeln<sup>3</sup> für die Trennschärfe, den Transport und den Wirkungsgrad bei verschiedenen Arbeitsbedingungen. In einer folgenden Arbeit<sup>10</sup> soll gezeigt werden, wie man die Korrekturgrößen  $P_r$  und  $P_K$  auf experimentellem Wege bestimmen kann.

darf, beweist eine Probe. Eine Lösung der Dgl. (5) bzw. (11) muß, in die letzte Gleichung eingesetzt, diese wiederum identisch erfüllen. Man kann sich durch eine Rechnung überzeugen, daß das bei der Lösung der genannten Autoren nicht der Fall ist.

<sup>10</sup> G. DICKE u. G. BÜRKHOLZ, Z. Naturforsch. **16 a**, 760 [1961], nachstehend.

<sup>3</sup> FURRY, JONES und ONSAGER<sup>5</sup>, ebenso JONES und FURRAY<sup>3</sup> haben mittels einer kurzen phänomenologischen Theorie einen Ausdruck gefunden, in welchem als Störungsglied nur eine unserm dritten Glied entsprechende Größe enthalten ist. Diese unterscheidet sich im wesentlichen von unserem Ausdruck durch den Faktor  $(\Delta x/\Delta y)^2$ , der hier hinzutritt. Daß ein solcher Ausdruck aber nicht vorkommen